ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀM THU HẢI

KHẢO SÁT NGHIỆM CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH SINH BỞI ĐẠO HÀM VÀ NGUYÊN HÀM CỦA MỘT ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀM THU HẢI

KHẢO SÁT NGHIỆM CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH SINH BỞI ĐẠO HÀM VÀ NGUYÊN HÀM CỦA MỘT ĐA THỨC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Mở đầu

Đa thức có vị trí rất quan trọng trong Toán học vì nó không những là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của Đại số mà còn là một công cụ đắc lực của Giải tích trong lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn, lý thuyết nội suy,... Ngoài ra, đa thức còn được sử dụng nhiều trong tính toán và ứng dụng. Trong các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia và Olympic toán quốc tế thì các bài toán về đa thức cũng thường được đề cập đến và được xem như những bài toán khó của bậc phổ thông.

Tuy nhiên cho đến nay, các tài liệu về đa thức chưa đề cập đầy đủ đến các dạng toán về phân bố số nghiệm thực của đa thức gắn với nghiệm của đa thức đạo hàm và đa thức nguyên hàm của nó. Vì vậy, việc khảo sát sâu hơn về các vấn đề biện luận nghiệm, biểu diễn đa thức thông qua các đa thức đạo hàm và đa thức nguyên hàm ccủa nó cho ta hiểu sâu sắc hơn các tính chất của đa thức đã cho.

Luận văn *"Khảo sát nghiệm của phương trình sinh bởi đạo hàm và nguyên hàm của một đa thức"* trình bày một số vấn đề liên quan đến bài toán xác định số nghiệm thực của đa thức với hệ số thực.

Mục đích của luận văn nhằm thể hiện rõ vai trò quan trọng của Giải tích trong khảo sát nghiệm thực của đa thức.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận và 4 chương.

Chương 1 trình bày chi tiết các định lý cơ bản, các kết qủa liên quan đến tam thức bậc hai.

Chương 2 trình bày chi tiết các định lý cơ bản, các kết qủa liên quan đến đa thức bậc ba.

Chương 3 xét các bài toán khảo sát và giải phương trình bậc bốn.

Tiếp theo, chương 4 trình bày một hệ thống bài tập áp dụng các định lý đã chứng minh ở các chương trước.

Hệ thống các ký hiệu sử dụng trong luận văn

$\deg P(x)$ là bậc của đa thức $P(x)$.
$F_0(x)$ là nguyên hàm (cấp 1) của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số $c = 0$,
tức là $F_0(x)$ thỏa mãn điều kiện $F_0(0) = 0$.
$F_c(x)$ là nguyên hàm (cấp 1) của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số c,
tức là $F_c(x) = F_0(x) + c$ với $c \in \mathbb{R}$.
$F_{0,k}(x)$ là nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số $c = 0$,
tức là $F_{0,k}(x)$ thỏa mãn điều kiện $F_{0,k}(0) = 0$.
$F_{c,k}(x)$ là nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$ ứng với hằng số c,
tức là $F_{c,k}(x) = F_{0,k}(x) + c$ với $c \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{H}_n$ là tập hợp đa thức với hệ số thực $P_n(x)$ bậc n $(n > 0)$ với hệ số tự do bằng 1 $(P_n(0) = 1)$ và có các nghiệm đều thực.
$M_k(f)$ là tập hợp các nguyên hàm cấp k của đa thức $f(x)$.
$\mathbb{R}[x]$ là tập hợp đa thức với hệ số thực.
$\operatorname{sign} a$ là dấu của số thực a, tức là

$$\operatorname{sign} a := \begin{cases} + & \text{khi } a > 0 \\ 0 & \text{khi } a = 0 \\ - & \text{khi } a < 0. \end{cases}$$

Chương 1. Các tính chất của tam thức bậc hai

Trong chương này, ngoài các kết qủa cơ bản về tam thức bậc hai như định lý về dấu (thuận và đảo) của tam thức bậc hai, Định lý Vieete, luận văn trình bày một số kết qủa mới về tam thức bậc hai liên quan đến tính chất của đạo hàm và nguyên hàm (xem [1]-[5]).

1.1 Định lý cơ bản về tam thức bậc hai

Như ta đã biết, đạo hàm của tam thức bậc hai là một nhị thức bậc nhất nên nó luôn luôn có nghiệm. Tuy nhiên, nguyên hàm của nhị thức bậc nhất là một tam thức bậc hai nên chưa chắc đã có nghiệm thực. Ta có kết qủa sau đây.

Định lý 1.1 (xem [2]-[4])**.** Mọi nhị thức bậc nhất đều có ít nhất một nguyên hàm là một tam thức bậc hai có hai nghiệm thực phân biệt.

Chứng minh. Thật vậy, xét nhị thức bậc nhất $h(x) = ax + b,\ \ a \neq 0$. Khi đó mọi nguyên hàm của $h(x)$ có dạng

$$H(x) = \frac{a}{2}\Big(x + \frac{b}{a}\Big)^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Trong (1.1) chọn c trái dấu với a, tức $ac < 0$ thì đa thức nguyên hàm $H(x)$ có nghiệm hai nghiệm phân biệt.

Để ý rằng mọi phương trình bậc hai tổng quát

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0$$

đều viết được dưới dạng

$$3x^2 - 2px + q = 0,$$

trong đó

$$p = -\frac{3b}{2a}, q = \frac{3c}{a}.$$

Vì vậy, về sau khi xét phương trình bậc hai thì ta chỉ cần quan tâm đến phương trình bậc hai dạng $3x^2 - 2px + q = 0$ là đủ.

Định lý 1.2 (xem [2]-[4])**.** Tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2px + q$ có nghiệm thực khi và chỉ khi tồn tại bộ ba số thực α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} p = \alpha + \beta + \gamma \\ q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \tag{1.2}$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử p, q có dạng (1.2). Khi đó tam thức bậc hai $g(x)$ có biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta' = p^2 - 3q &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\Big[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\Big] \geq 0, \ \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử tam thức bậc hai $g(x)$ có nghiệm.

- Nếu hai nghiệm của $g(x)$ trùng nhau thì $g(x) = 3(x - x_0)^2$ và đa thức nguyên hàm tương ứng có dạng $G(x) = (x - x_0)^3 + r, \ \ r \in \mathbb{R}$. Chọn $r = 0$ ta thấy $G(x)$ có 3 nghiệm trùng nhau.

- Nếu $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thì $g(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$ và đa thức nguyên hàm $G(x) = x^3 - px^2 + qx - r, \ \ r \in \mathbb{R}$ đạt cực đại tại $x = x_1$ và cực tiểu tại $x = x_2$. Để ý rằng (SGK lớp 12) các điểm $(x_1, G(x_1))$ và $(x_2, G(x_2))$ đối xứng với nhau qua điểm uốn

$$U\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, G\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big)\Big) = U\Big(\frac{p}{3}, G\Big(\frac{p}{3}\Big)\Big).$$

Vậy chỉ cần chọn r sao cho $G\Big(\dfrac{p}{3}\Big) = 0$, tức $r = \Big(\dfrac{p}{3}\Big)^3 - p\Big(\dfrac{p}{3}\Big)^2 + q\Big(\dfrac{p}{3}\Big)$ thì đa thức nguyên hàm $G(x)$ tương ứng sẽ có ba nghiệm thực lập thành một cấp số cộng, gọi các nghiệm đó là α, β, γ, ta thu được

$$G(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - px^2 + qx - r.$$

Từ đây ta thu được hệ thức (1.2).

Nhận xét 1.1. Để ý rằng mọi tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ đều viết được dưới dạng

$$f(x) = \frac{a}{3}g(x), \ \ g(x) = 3x^2 - 2px + q \text{ trong đó } p = -\frac{3b}{2a}, q = \frac{3c}{a}.$$

Từ nhận xét 1.1 và Định lý 1.2, ta thu được kết qủa quan trọng về nghiệm của tam thức bậc hai tổng quát sau.

Định lý 1.3 (xem [2]-[4]). Tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có nghiệm thực khi và chỉ khi tồn tại bộ ba số thực α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} -\dfrac{3b}{2a} = \alpha + \beta + \gamma \\ \dfrac{3c}{a} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2 Nội suy bất đẳng thức đối với tam thức bậc hai trên một khoảng

Tiếp theo ta trình bày một số kết qủa của Lupas về ước lượng tam thức bậc hai trên một khoảng.

Định lý 1.4 (xem [2], [5]). *Giả sử* $G(x) = Px^2 + Qx + R$. *Khi đó bất đẳng thức* $G(x) \geqslant 0$ *thỏa mãn với mọi* $x \in [a, b]$, *khi và chỉ khi*

$$G(a) \geqslant 0,\, G(b) \geqslant 0 \quad \text{và} \quad 2G\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - \frac{G(a) + G(b)}{2} \geqslant \sqrt{G(a)G(b)}. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Giả sử (1.4) thỏa mãn. Ký hiệu

$$m = \frac{\sqrt{G(b)} - \sqrt{G(a)}}{b - a}, \;\; n = \frac{b\sqrt{G(a)} - a\sqrt{G(b)}}{b - a},$$

và

$$K \equiv K[G] := \frac{2}{(b-a)^2}\left[2G\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{G(a) + G(b)}{2} - \sqrt{G(a)G(b)}\right]. \tag{1.5}$$

Khi đó $K \geqslant 0$. Mặt khác thì

$$G(x) = (mx + n)^2 + K(x - a)(b - x)$$

suy ra

$$G(x) \geqslant 0, \forall x \in [a, b]. \tag{1.6}$$

Ngược lại, giả sử (1.6) thỏa mãn. Khi đó $G(a) \geqslant 0$, $G(b) \geqslant 0$ và $G(x)$ có thể viết được dưới dạng (Định lý Lukac)

$$G(x) = (m_1x + n_1)^2 + K_1(x - a)(b - x) \;\text{ với }\; K_1 \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Nếu trong (1.7) ta chọn $x \in \left\{a,\, \dfrac{a+b}{2},\, b\right\}$ thì sẽ có

$$\begin{cases} (m_1a + n_1)^2 = & G(a) \\ (m_1b + n_1)^2 = & G(b) \end{cases} \quad \text{và} \quad K_1 = K, \tag{1.8}$$

K được chọn như trong (1.8). Nhận xét rằng hệ (1.8) cho ta m_1, n_1 và ta có $K \equiv K[G] \geqslant 0$, tức bất đẳng thức (1.6) được chứng minh.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng với mọi tam thức bậc hai $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ta đều có $|f(x)| \leqslant 1,\ \ \forall x \in [a, b]$ xảy ra khi và chỉ khi $|f(a)| \leqslant 1$, $|f(b)| \leqslant 1$ và khi đó

$$-1 + \sqrt{(1 - f(a))\,(1 - f(b))} \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2} - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant 1 - \sqrt{(1 + f(a))\,(1 + f(b))}\,.$$

Lời giải. Sử dụng kết qủa Định lý 1.4

$$G(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a, b],\ \ \Leftrightarrow\ \ G(a) \geqslant 0, G(b) \geqslant 0,\ K[G] \geqslant 0, \tag{1.9}$$

với $G_1(x) := 1 - f(x)$ và $G_2(x) = f(x) + 1$. Thật vậy $\begin{cases} G_1(x) \geqslant 0 \\ G_2(x) \geqslant 0 \end{cases}$, $\forall x \in [a, b]$, khi và chỉ khi $|f(a)| \leqslant 1$, $|f(b)| \leqslant 1$, và $K[G_1] \geqslant 0$, $K[G_2] \geqslant 0$. Hai bất đẳng thức cuối này là như nhau với

$$\begin{cases} 1 - 2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{f(a) + f(b)}{2} - \sqrt{(1 - f(a))\,(1 - f(b))} \geqslant 0 \\ \\ 1 + 2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - \dfrac{f(a) + f(b)}{2} - \sqrt{(1 + f(a))\,(1 + f(b))} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Bài toán 1.2. *Cho* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\left\{|p(0)|, \left|p\left(\frac{1}{2}\right)\right|, |p(1)|\right\} \subset [0, 1].$$

Chứng minh rằng $|a| \leqslant 8$, $|b| \leqslant 8$, $|c| \leqslant 1$ *và* $|2ax + b| \leqslant 8$, $\forall x \in [0, 1]$.

Lời giải. Để ý rằng

$$\begin{cases} a = 2p(0) - 4p\left(\dfrac{1}{2}\right) + 2p(1),\ \ b = -3p(0) + 4p\left(\dfrac{1}{2}\right) - p(1) \\ c = p(0), 2a + b = p(0) - 4p\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3p(1). \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta có $|a| \leqslant 8$, $|b| \leqslant 8$, $|c| \leqslant 1$, $|2a + b| \leqslant 8$. Khi $h(x) := 2ax + b$, thì $|h(0)| \leqslant 8$, $|h(1)| \leqslant 8$ kéo theo $|h(x)| \leqslant 8$, $\forall x \in [0, 1]$.

Nhận xét 1.2. Chú ý rằng đánh giá trên là tối ưu. Thật vậy, giả sử $p(x) = 8x^2 - 8x + 1$. Khi đó $|p(x)| \leqslant 1$ và $|p'(x)| = |16x - 8| \leqslant 8$ trên $[0, 1]$.

Bài toán 1.3. Giả sử $\mathcal{M}_2$ là tập hợp tất cả các đa thức bậc không quá 2 và $\mathcal{M}_2^* := \{ p \in \mathcal{M}_2 \; ; \; |p(t)| \leqslant 1, \forall t \in [0,1] \}$. Tìm tất cả các đa thức $Q, Q \in \mathcal{M}_2^*$, sao cho với mọi $p \in \mathcal{M}_2^*$ ta đều có

$$|p(x)| \leqslant Q(x) \;,\; \forall x \in x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \,.$$

Chứng minh rằng đa thức nghiệm Q là duy nhất.

Lời giải. Ta chứng minh rằng $Q(x) = 8x^2 - 8x + 1 = T_2(2x-1)$ trong đó $T_2(z) = 2z^2 - 1$ là đa thức Chebychev loại 1. Giả sử rằng $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{M}_2^*$. Vì

$$p(x) = (2x-1)(x-1)p(0) - 4x(x-1)p\left(\frac{1}{2}\right) + x(2x-1)p(1),$$

ứng với mọi $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ nên

$$|p(x)| \leqslant (2x-1)(x-1) + 4x(x-1) + x(2x-1) = 8x^2 - 8x + 1 =: Q(x) \,.$$

Để ý rằng $|Q(t)| = |1 - 8t(1-t)| \leqslant 1, \forall t \in [0,1]$, nên $Q \in \mathcal{M}_2^*$. Tính duy nhất nghiệm là hiển nhiên.

Nhận xét 1.3. Kết qủa của bài toán vẫn đúng khi tập $\mathcal{M}_2^*$ được mở rộng như sau:

$$\mathcal{M}_2^* := \left\{ p \in \mathcal{M}_2 \; ; \; \left| p\left(\frac{k}{2}\right) \right| \leqslant 1 \;,\; \text{khi} \quad k = 0, 1, 2 \right\} \,.$$

Bài toán 1.4. Cho $A, B, C \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Xét $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{t(1-t)}\; |f(t)| \leqslant M, \;\; \forall t \in [0,1]$. Chứng minh rằng khi đó ứng với mọi x ta đều có

$$|f(x)| \leqslant 6M + 24M \left(|x(1-x)| - x(1-x) \right) . \tag{1.11}$$

Lời giải. Nhận xét rằng, nếu $p(x) := \dfrac{f(x)}{6M} = ax^2 + bx + c$, thì ta cần chứng minh rằng từ điều kiện $6\sqrt{x(1-x)}\; |p(x)| \leqslant 1, \;\; \forall x \in [0,1]$, suy ra

$$|p(x)| \leqslant \begin{cases} 1 & , \;\; \text{nếu} \;\; x \in [0,1] \\ 8x^2 - 8x + 1 & , \;\; \text{nếu} \;\; x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Ta chứng minh

$$|p(x)| \leqslant \frac{1}{6\sqrt{x(1-x)}}, \;\; \forall x \in (0,1), \tag{1.12}$$

kéo theo $|p(x)| \leqslant 1, \forall x \in [0,1]$. Xét trong $[0,1]$ hệ các điểm x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{1}{2} - h \;,\; x_2 = \frac{1}{2} \;,\; x_3 = \frac{1}{2} + h \;\; \text{với} \;\; h \in \left(0, \frac{1}{2}\right) .$$